Midtoets Lineaire Algebra

4 juni 2009 14.00-16.15 uur

Tijdens deze toets mogen boek/diktaat/aantekeningen en de grafische rekenmachine worden geraadpleegd. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.** Een antwoord zonder berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes !

Vermeld op elke bladzijde je naam en studentnummer.

Gratis: $\boxed{10}$

1. Gegeven zijn de matrix **A** en de vector $\vec{\mathbf{b}}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Hierin zijn α en β nader te bepalen constantes.

(a) $\boxed{6}$ Neem $\alpha = -1$ en $\beta = 5$ en bepaal de oplossing van $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

(b) $\boxed{6}$ Bepaal voor welke α de vergelijking $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ precies één oplossing heeft.

(c) $\boxed{6}$ Bepaal voor welke α en β de vergelijking $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ geen enkele oplossing heeft.

2. Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hierin is α een nader te bepalen constante.

(a) $\boxed{4}$ Bepaal de hoek tussen $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$.

(b) $\boxed{5}$ Geef 'n vector ongelijk aan de nulvector, die zowel loodrecht op $\vec{\mathbf{a}}$ als $\vec{\mathbf{b}}$ staat.

(c) $\boxed{5}$ Bepaal voor welke α geldt dat $\vec{\mathbf{c}} \in \text{span}(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$, dus dat de vector $\vec{\mathbf{c}}$ in het lineaire opspansel van $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ zit.

(d) $\boxed{4}$ Voor welke α zijn $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ lineair onafhankelijk?

3. Gegeven is de matrix **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Hierin is α een nader te bepalen constante.

(a) $\boxed{7}$ Bereken de inverse van **A** voor het geval $\alpha = 0$.

(b) $\boxed{8}$ Bereken de determinant van **A** voor de gevallen $\alpha = 0$ en $\alpha = -2$.

$\boxed{\text{Z.O.Z.}}$

4. Gegeven zijn de matrix $\mathbf{A}$ en de vectoren $\vec{\mathbf{p}}$, $\vec{\mathbf{q}}$ en $\vec{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De lineaire afbeelding $\mathbf{T}$ is gedefinieerd door $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(a) $\boxed{3}$ Bereken het beeld van $\vec{\mathbf{p}}$ onder de afbeelding $\mathbf{T}$.

(b) $\boxed{8}$ Bereken een orgineel van $\vec{\mathbf{q}}$ onder de afbeelding $\mathbf{T}$. Is dit het enige orgineel? Verklaar je antwoord.

(c) $\boxed{6}$ De inverse (omgekeerde) afbeelding van $\mathbf{T}$ is gedefinieerd door $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.
Bepaal het beeld van $\vec{\mathbf{r}}$ onder de afbeelding $\mathbf{S}$.
Opmerking: dat kan zonder de inverse van $\mathbf{A}$ te bepalen.

5. Gegeven zijn de mutatiematrix $\mathbf{M}$ en de toestandsvector $\vec{\mathbf{r}}_0$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{r}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De matrix $\mathbf{M}$ beschrijft toestandsovergangen volgens $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{r}_k$.

(a) $\boxed{8}$ Bereken de eigenwaarden van $\mathbf{M}$.
Aanwijzing: $\lambda = 1$ is één van de eigenwaarden.

(b) $\boxed{6}$ Bereken de eigenvectoren van $\mathbf{M}$.

(c) $\boxed{3}$ Is de matrix $\mathbf{M}$ diagonaliseerbaar? Leg uit waarom wel/niet.
Let op: je hoeft de eventuele diagonalisatie niet te berekenen.

(d) $\boxed{5}$ Leg uit wat de toestand $\vec{\mathbf{r}}_{100}$ zal zijn, wanneer wordt begonnen met begintoestand $\vec{\mathbf{r}}_0$.
Opmerking: deze vraag is te beantwoorden zonder al teveel rekenwerk.

Totaal: $\boxed{100}$